Schwingungen können auch zweidimensional überlagert werden. Lässt man ein Fadenpendel "eiern", beschreibt es (von oben betrachtet) eine Ellipsenbahn, jedem Punkt dieser Bahn müssen zwei Koordinaten (z.B. x und y) zugeordnet werden, daher zweidimensional.
Da sind wir schon wieder "am Modell": Betrachten das Pendel einmal auf der x-Achse stehend als Schattenbild und sagen eindimensional, dann, auf der y-Achse stehend, sehen wir das Schattenbild wieder nur eine eindimensionale Schwingung ausführen. Aus Verzweiflung nennen wir das Ergebnis zweidimensionale Überlagerung. Dem Pendel ist es Wurscht und pendelt einfach weiter auf einer Ellipse! Übrigens haben wir Analoges (wahren Vorgang zerlegen in gedachte einfachere) bereits beim schiefen Wurf oder Kräftezerlegung auf der schiefen Ebene gemacht.

Parametrische Darstellung von Kurven am Beispiel Fadenpendel

Obiges Problem lässt sich mathematisch bestens in s.g. parametrischer Darstellung untersuchen und bearbeiten. Man klettert dazu auf der z-Achse hoch, macht es sich in angenehmer Höhe bequem und lässt pendeln.
Angefangen in der Ruhelage, bekommt es zur Zeit $t = 0$ einen kurzen Schubs in x-Richtung und das Schattenbild zeichnet eine Strecke, die wir später "doppelte Halbachse" nennen werden. Die x-Koordinate gehorcht der Gleichung

$$x(t) = \hat{s}_x \sin \omega t.$$

Aus Neugier noch das Gleiche, mit etwas anderem Schubs entlang der y-Koordinate ..., sie gehorcht der Gleichung

$$y(t) = \hat{s}_y \sin \omega t.$$

Beide Schubse gleichzeitig und man hat wieder eine Strecke in der Schattenprojektion, nur ist sie jetzt schief, daher zweidimensional ...., also kurz vor der Ellipse :)
Dann legen die Mathematiker los und basteln daraus die durchaus praktische parametrische Darstellung

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t)\,, \end{aligned}$$

mit der sich viele wunderschöne Kurven zeichnen lassen.
Die algemeine Syntax im Scientific dafür ist (die äußere Klammer gehört dazu!)

$$(f(t), g(t))\,.$$

1. Also zurück zur Schwingung und zur versprochenen Ellipse ... Untersuche parametrisch gegebene **periodische** Vorgänge (also Schwingungsüberlagerungen) der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} x &= a_1 \sin(b_1 t) \\ y &= a_2 \sin(b_2 t) \end{aligned}$$

   mit dem CAS-Plotter (Berechnungen / 2D-Diagramm / von parametrischer Form ...). In der passenden Syntax also die Kombinationen von ...

$$(\sin t, \sin t) \qquad (\sin t, \cos t) \qquad (\sin t, 2\cos t) \qquad (\sin 2t, \cos 3t) \qquad \text{usw.}$$

   Achte darauf, dass die **Achsen gleich geeicht sind** (Diagrammoptionen!!!) Beantworte danach (schriftlich, in CAS) folgende Fragen

   (a) Wann entsteht eine Gerade mit der Steigung $m = 1$?
   (b) Wann entsteht eine Gerade mit der Steigung $m = -2$?

(c) Wann entsteht ein Kreis?

(d) Wann entsteht eine Ellipse, was ist verantwortlich für ihre Halbachsen?

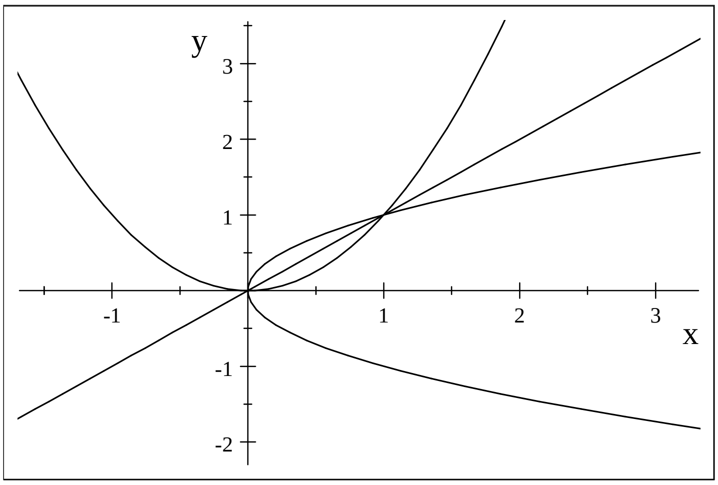
(e) Welche Möglichkeiten gibt es beim Frequenzverhältnis 1:2 und 2:3? Stelle sie dar.

(f) Was sind Lissajous-Figuren, wann sind sie geschlossen und warum (beantworte nicht mit "Höchst-Mathe" sondern erläutere anhand einfacher Fälle ...)?

2. Aufgabe 1 war Physik, jetzt etwas für Mathe. Eine feine Sache ist diese Darstellung, da sie es erlaubt, "Kurven" zu zeichnen, die mit der "üblichen" Funktionsvorschrift $f(x)$ nicht funktionieren (dürfen), da eine Funktion $f(x)$ per Definition nicht zwei Werte zu einem x liefern darf. Na ja, und das wäre bei den obigen geschlossenen Kurven ziemlich häufig der Fall.

   (a) Selbstverständlich kann auch eine gewöhnliche Parabel parametrisch geschrieben (dargestellt) werden, gibt scheinbar wenig Sinn ..., höchstens zum Vertiefen des Verständnisses der "parametrischen Darstellung" ...

$$(x, x^2)$$



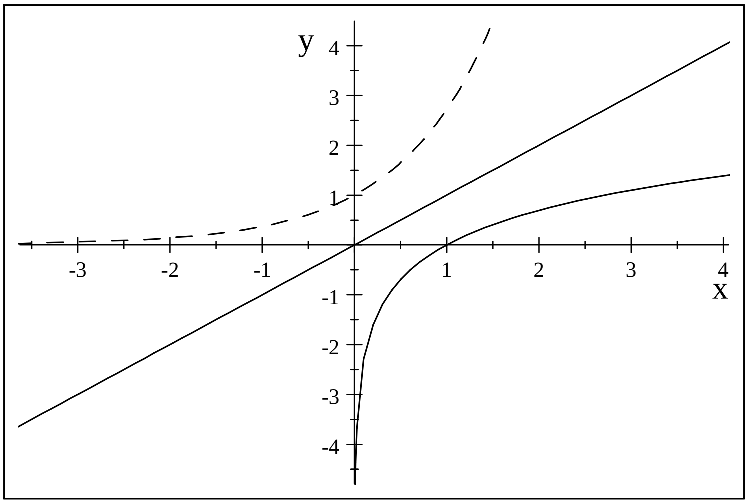
Es sei denn, man ist ein Mathe-Grübler und möchte auch das Verständnis der Inversen-Funktion (Umkehr-) vertiefen ...., indem man dem obigen Graphen noch die Darstellung

$$(x^2, x)$$

hinzufügt .... Dann noch eine Symmetrie-Achse hinzeichnen lassen, den richtigen Bereich festlegen und fertig ...
Ja sicher, es ist die Funktion $\sqrt{x}$ ..., allerdings ohne sich darum zu kümmern, dass sie nur einen Funktionswert haben darf, eben "parametrische Darstellung", da muss nichts umkehrbar sein ...

   (b) In der gleichen Art kann man noch die "Umkehrverwandschaft" von Logarithmus- und Exponentialfunktion untersuchen ...

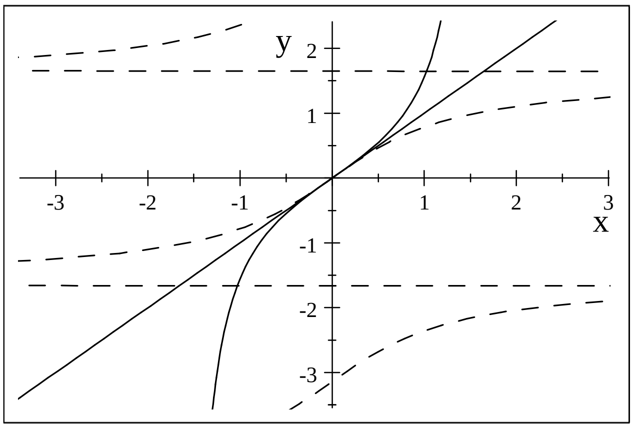
$$(x, \ln x)$$
$$(\ln x, x)$$
$$(x, x)$$



Ohne diese parametrische Darstellung hätte man mit $\ln x$ und e^x arbeiten müssen, in der parametrischen Darstellung muss man nur formal das tun was die Umkehrfunktion per Definition ausmacht, nämlich das Vertauschen der Definitions- und Wertemenge ...

(c) ... oder von z.B. $\tan x$ und $\arctan x$ ...

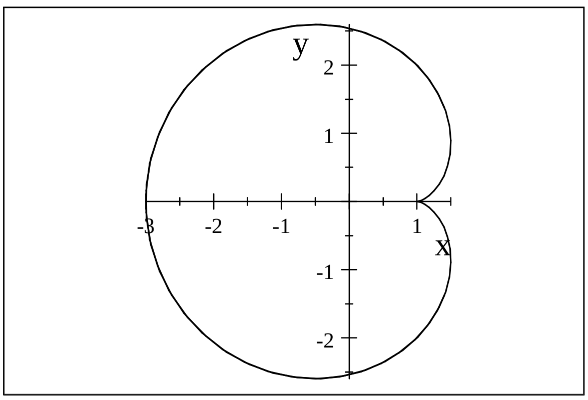
$$(\tan x, x)$$
$$(\arctan x, x)$$



3. Na, da jetzt die einzigen zwei wichtigen Fächer abgehandelt wurden, bleibt nur noch Platz für etwas Spaß & Spiel mit "Zykloiden", also "Abrollkurven" ... (wobei sich diese Kurven wesentlich anschaulicher in einer anderen Darstellung verstehen lassen ..., s. Polarkoordinaten ...)

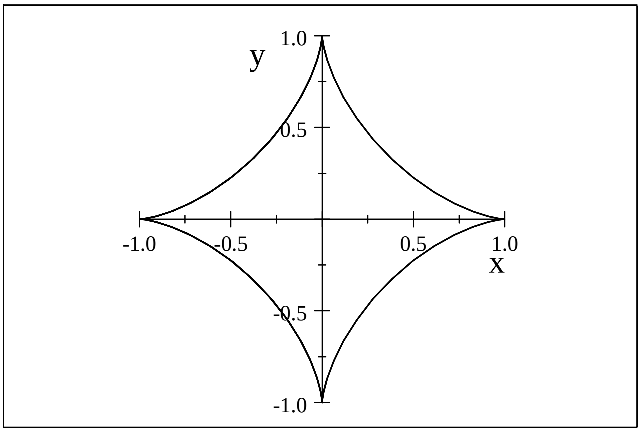
   (a) ... und "Herzensbildung" mit der Kardioide ...

$$(2a\cos t - a\cos 2t, 2a\sin t - a\sin 2t) \qquad \text{mit } a = 1$$



... oder Sternenblick mit der Asteroide ...

$$(r\cos^3 t, r\sin^3 t) \qquad \text{mit } r = 1$$



... und um zu sehen, wie viele Leute sich mit solchen Spielchen befassen nur einige Links aus einer "Unzahl" weiterer Links ...
http://de.wikipedia.org/wiki/Kardioide
http://www.mathematische-basteleien.de/herz.htm
http://haftendorn.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt/mathe-lehramt.htm
http://www-hm.mathematik.tu-muenchen.de/ss06/bv2/aufgaben/Kardioide.html

usw. ...