**Beispiel kinetische Energie eines beschleunigten Körpers** - die aus der geleisteten Beschleunigungsarbeit gewonnene kinetische Energie (erst mal mit konstanter Kraft $F = a \cdot m$ ) soll berechnet werden. Dabei soll die Geschwindigkeit linear von Null auf den Wert $v$ gesteigert werden.
Die Arbeit ist einfach zu rechnen als $W = F \cdot s$, falls die Kraft entlang der Strecke konstant bleibt und am Anfang des Vorganges $s = 0$ galt. Ändert sich die Kraft entlang der ganzen Beschleunigungsstrecke (und das ist der Regelfall), müssen Arbeitszuwächse wieder stückweise aufaddiert werden. Das "stückweise" Rechnen (integrieren) kann man immer anwenden; fast sollte man es sich auch für die Fälle angewöhnen, in denen es nicht erforderlich ist. Entlang eines infinitesimalen Streckenzuwachses $ds$ wächst die Arbeit um $dW$ :

$$\begin{aligned} dW &= F \cdot ds = m \cdot a \cdot ds, && (1)\\ W &= \int_0^s m \cdot a \cdot ds = m \cdot a \cdot s + W_0 && (2) \end{aligned}$$

Also, man hat eine Formel, mit der man die kinetische Energie eines mit $a$ entlang $s$ beschleunigten Körpers. Na ja, in Abhängigkeit von $v$ hätte man es lieber gehabt. D.h. $v$ und $dv$ müssen noch vor der Integration in den Term reingebracht werden. Mit $a = \frac{dv}{dt}$ und $v = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow ds = v \cdot dt$ bringt man die gegebene Variable ins Spiel, und so wird der infinitesimale Arbeitszuwachs $dW$ zu

$$dW = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt \quad \Leftrightarrow dW = m \cdot v \cdot dv. \tag{3}$$

Die gesamte zu berechnende Arbeit, d.h. vom Stillstand bis zur Geschwindigkeit $v$ wird dann wieder per Integral ermittelt zu

$$W = \int_0^v mv \cdot dv = \frac{1}{2}mv^2 + W_0. \tag{4}$$

Auch hier siehst du den formalen Vorteil der Differentialschreibweise, bei der die Differentiale $dv$, $dt$, $ds$ algebraisch gehandhabt werden.
Die Integrationskonstante $W_0$ ist die **bereits vor dem Beschleunigungsvorgang** (also bei $v = 0$) im Körper vorhandene Energie. Für eine physikalisch sinnvolle Lösung wird sie durch die Anfangsbedingungen festgelegt, **in der Regel zu** $W_0 = 0$. Sie kann aber auch die kinetische Energie der Erd- oder Universumrotation oder die chemische Energie des darin versteckten Sprengstoffs darstellen. Interessiert nur das Ergebnis der Beschleunigung ergibt sich also auch formal

$$\begin{aligned} W(v &= 0) = 0 \quad \text{also}\\ \frac{1}{2}m0^2 + W_0 &= 0 \iff W_0 = 0. \end{aligned}$$

In Mathe galt doch ...

$$F(x) = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R},$$

wo für eine ganze Funktionenschar $(\frac{x^2}{2} + C)' = x$ galt. Diese "additive Konstante C" hat also auch eine praktische Bedeutung.

**Übung 1:** Verformungsenergie einer linearen Feder - Die geleistete Verformungsarbeit und die gespeicherte Spannungsenergie ist zu berechnen. Verfahre wie im Beispiel 1, beachte, dass die Kraft nicht konstant bleibt.

- Leite für eine Schraubenfeder (es gilt $F(s) = D \cdot s$ im Proportionalbereich) die Formel für den Energiezuwachs zwischen den Stellungen $s_1$ und $s_2$ her.
- Leite für eine ungespannte Feder die Formel für die benötigte Arbeit beim Spannen bis zur Verlängerung $s$ her.
- Eine Feder mit $D = \frac{5\,\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$, die bereits mit 40 cm vorgespannt ist, soll um weitere 10 cm gespannt werden. Welche Arbeit ist dazu erforderlich, und welche Energie ist dann in der Feder gespeichert?