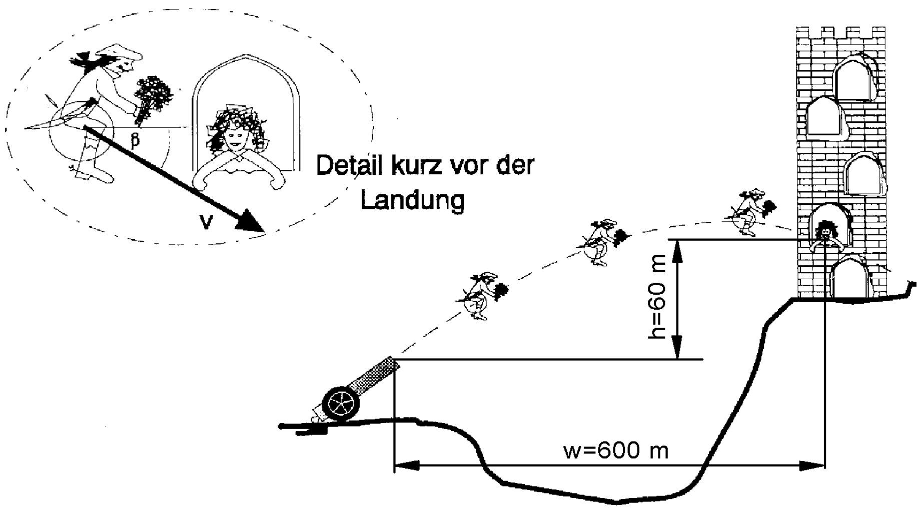
Münchhausen

An die Berechnung des "schiefen Wurfes" konnte sich Baron von Münchhausen (der auf Kanonenkugeln zu reisen pflegte, sich am eigenen Haarschopf aus einem Sumpf ziehen konnte und anderen nützlichen physikalischen Unsinn trieb) zum Glück noch gut erinnern (damals Stoff im achten Schuljahr). Als er ein Burgfräulein unter schwierigen (es war eigentlich eine Burgfrau) Umständen besuchen wollte, hatte er also eine Lösung (s. Skizze) sofort parat:



Die Entfernung und Höhe hatte er auf $w = 600\,\mathrm{m}$ und $h = 60\,\mathrm{m}$ geschätzt; die erforderliche Kanone auf einen Abschusswinkel $\alpha = 45°$ eingestellt. Dann hatte er die erforderliche Abschussgeschwindigkeit v_0 berechnet und entsprechend die Pulvermenge abgemessen. Es klappte!

1. (a) Welche Geschwindigkeit v_0 hatte er berechnet, wenn er auf dem fallenden Ast der Flugparabel absteigen wollte (klar, er wollte ihr in die Arme sinken)? (Ergebnis etwa $80\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$)

   (b) Wie lange war er unterwegs?

   (c) Welche Momentangeschwindigkeit v hatte er beim Absprung und unter welchem Winkel β (zur Horizontalen) landete er? (um $70\frac{m}{s}$ und etwa $40°$)

Lösungen

1. (a) Den Ansatz liefern die s_x- und s_y-Gleichungen für die Zeit t_{ab} :

$$s_x(t_{ab}) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_{ab} \qquad \text{dabei ist} \qquad s_x(t_{ab}) = w!$$

$$s_y(t_{ab}) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_{ab} - \frac{1}{2} g t_{ab}^2 \qquad \text{dabei ist} \qquad s_y(t_{ab}) = h!$$

Aus der ersten Gleichung läßt sich t_{ab} berechnen und in die zweite einsetzen:

$$w = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_{ab} \Longleftrightarrow t_{ab} = \frac{w}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

$$h = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{w}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{w}{v_0 \cdot \cos\alpha} \right)^2 \qquad \text{umformen zu}$$

$$\frac{1}{2} g \frac{w^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} = \tan\alpha \cdot w - h$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g w^2}{2 \cos^2\alpha \left(\tan\alpha \cdot w - h \right)}} = \ldots = 80,87 \frac{m}{s}.$$

(b) Die Flugzeit t_F bis zum Aufprallpunkt wird hier benötigt.
Da die s_x-Entfernung bekannt ist, folgt aus

$$\begin{aligned} s_x &= w = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_F \\ t_F &= \frac{w}{v_0 \cdot \cos\alpha} = 10,5\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

(c) Momentangeschwindigkeit im Absprungspunkt ist die vektorielle Addition von v_0 und v_g:$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \vec{g}t$.
Die vektorielle Addition kann man durch algebraische Addition der Komponenten von v_x und v_y umgehen und die resultierende Geschwindigkeit dann nach Pythagoras ausrechnen.
Die Geschwindigkeitskomponenten sind dann:

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha = 57,18 \frac{m}{s}$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - g t_F = v_0 \sin\alpha - \frac{g w}{v_0 \cdot \cos\alpha} = (57,18 - 102,93) \frac{m}{s} = -45,75 \frac{m}{s}$$

in vektorieller Form also

$$\vec{v}(t) = \ldots = \begin{pmatrix} 57,16 \\ -45,75 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$$

nach Pythagoras

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \ldots = 73,23 \frac{m}{s}.$$

$$\tan\beta = \frac{v_y}{v_x} \Longleftrightarrow \beta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = -38,66^\circ$$