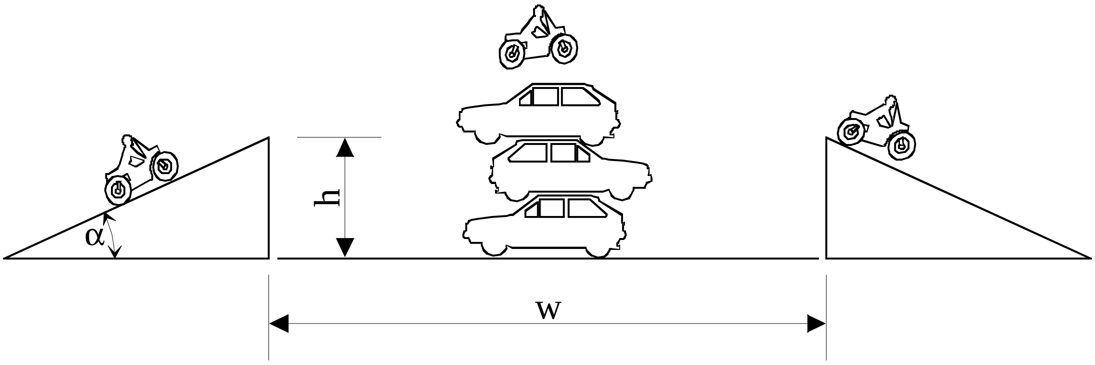
Hell Drivers
Das Gymnasium soll dir unter anderem helfen, Kenntnisse und Fähigkeiten für das spätere Erwerbsleben zu sammeln. Wenn schon nicht gleich selbst fahren, so zumindest eine Hell-Driver-Show planen. Motorrad, ein Paar alte Schrottautos, zwei Rampen, einen Abgrund und viel Platz für die Fahrer und zahlende Zuschauer. Du fängst, wie im Unterricht gelernt, selbstverständlich mit einer Skizze an:



Die Entfernung der beiden Rampen soll betragen $w = 10\,\mathrm{m}$, die Höhe $h = 3\,\mathrm{m}$, der Neigungswinkel $\alpha = 30\,°$.

1. (a) Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss der Motorradfahrer die Rampe verlassen, wenn er punktgenau auf der zweiten Rampe landen will? (Ergebnis etwa $80\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$)
   (b) Reicht diese Geschwindigkeit aus, um die genau zwischen den Rampen aufgetürmten Schrottautos zu überspringen (Höhe von einem Auto $1,6\,\mathrm{m}$)?
   (c) Als Höhepunkt der Show springt der Fahrer ohne die zweite Rampe und ohne die Schrottautos, mit einer Geschwindigkeit von $v = 20\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in einen Abgrund (Tiefe $b = 10\,\mathrm{m}$).
      i. Wie weit springt er?
      ii. Wie ist seine wahre Fluggeschwindigkeit bei der Landung?
      iii. Unter welchem Winkel landet er?

Lösungen

Stelle erst alle relevanten Beziehungen für den Ortsvektor $\vec{s}$

$$
\begin{aligned}
s_x(t) &= v_{0x} \cdot \cos\alpha \cdot t \\
s_y(t) &= v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2
\end{aligned}
$$

und für die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}$ zusammen:

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_0 \cdot \cos\alpha \\
v_y &= v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t
\end{aligned}
$$

1. (a) Den Ansatz liefern die s_x- und s_y-Gleichungen für die Zeit t_{Lande}:

$$s_x(t_{Lande}) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_{Lande} \qquad \text{dabei ist} \qquad s_x(t_{Lande}) = w!$$

$$s_y(t_{Lande}) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_{Lande} - \frac{1}{2} g t_{Lande}^2 \qquad \text{dabei ist} \qquad s_y(t_{Lande}) = h!$$

Die Landezeit ist die doppelte Steigzeit, die Steigzeit lässt sich aus der Scheitelpunktbedingung für die Geschwindigkeit berechnen:

$$
\begin{aligned}
v_y &= v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t_{Scheitel} \stackrel{!}{=} 0 \\
t_{Scheitel} &= \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
w &= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot t_{Scheitel} = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot t_{Scheitel} = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \\
v_0^2 &= \frac{w \cdot g}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha} \Longleftrightarrow v = \sqrt{\frac{w \cdot g}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{10\,\mathrm{m} \cdot 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}} = 10.643 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

(b) Die Steigzeit ist jetzt berechenbar, damit auch $s_y(t_{Steig})$

$$s_y(t_{Steig}) = \cdots = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \right)^2$$

Die Schlauen schauen vor jedem Einsetzen, ob sich der Term nicht vereinfachen lässt

$$s_y(t_{Steig}) = \cdots = \frac{1}{2} \frac{(v_0 \cdot \sin\alpha)^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(10.643 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \sin 30^\circ\right)^2}{9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1.443\,3\,\mathrm{m}$$

Jetzt noch die eigentliche Starthöhe hinzu addieren und mit der Höhe der drei Autos vergleichen

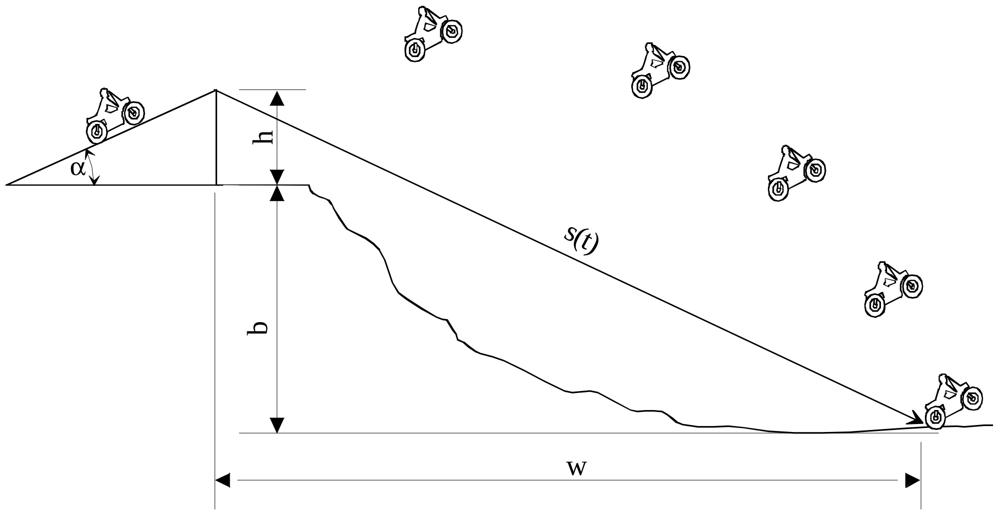
$$
\begin{aligned}
3 \cdot 1.6\,\mathrm{m} &\stackrel{??}{<} 3\,\mathrm{m} + 1.443\,\mathrm{m} \\
4.8\,\mathrm{m} &\stackrel{??}{<} 4.443\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Na ja, geplättet müssen die Schrottautos schon sein, außerdem etwas Reiz für die Zusacheur, mit zwei Schrottautos wäre es langweilig ... ...Den Ansatz liefern die s_x- und s_y-Gleichungen für die Zeit t_{Lande}:

$$s_x(t_{Lande}) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_{Lande} \qquad \text{dabei ist} \qquad s_x(t_{Lande}) = w!$$

$$s_y(t_{Lande}) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_{Lande} - \frac{1}{2} g t_{Lande}^2 \qquad \text{dabei ist} \qquad s_y(t_{Lande}) = h!$$

(c) Als erstes wieder eine Skizze ..., mit dem Ortsvektor!!



Eigentlich immer wieder das gleiche Spiel ..... Was kenne ich? Die Gesamtfallstrecke. Gleichung aufstellen, daraus die Gesamtflugzeit berechnen, danach einfach ... Wird fies sein, da die Zeit in einer quadratischen Gleichung verwickelt steckt ...

$$s_y\left(t_{Lande}\right) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_{Lande} - \frac{1}{2} g t_{Lande}^2 = h + b$$

Allgemein lösen? Nur noch für die ganz Harten, es reicht mit den Zahlenwerten .... Warum du "$-13\,\mathrm{m}$" einsetzen musst, ist klar? (Wo liegt der Nullpunkt des Koordinatensystems?)

$$\begin{aligned} s_y\left(t_{Lande}\right) &= 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin 30^\circ \cdot t - \frac{1}{2} 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 = -13\,\mathrm{m} \\ 10.0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 4.905\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 &= -13\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Einheiten stimmen, das Ergebnis wird also "in Sekunden kommen" ...

$$10.0 \cdot t - 4.905 \cdot t^2 = -13$$

Lösung ist: $\{[t = 2.940\,2], [t = -0.901\,43]\}$. Physikalisch sinnvoll ist in dieser Aufgabe nur die "positive" Zeit.

Tipp: Benutze in der Physik immer die "a-b-c-Formel, nicht die umständliche p-q-Formel aus Mathe. Du ersparst dir die erforderliche (ggf. fehlerträchtige) Normierung, also:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{-4ac + b^2}}{2a} \end{aligned}$$

i. Mit der nun bekannten Flugzeit ist der Rest der Aufgabe nur reines Einsetzen in die oben bereits aufgestellten Formeln, zugegeben etwas mühsam ....

$$s_x\left(t_{Lande}\right) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_{Lande} = \cdots = 20.0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \cos 30^\circ \cdot 2.9402\,\mathrm{s} = 50.926\,\mathrm{m}$$

ii.

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cdot \cos\alpha = \cdots = 17.321\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ v_y &= v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t = \cdots = 20.0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sin 30^\circ - 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2.9402\,\mathrm{s} = -18.843\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ v &= \sqrt{\ldots} = \sqrt{\left(17.321\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(-18.843\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 25.\,594\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{v_y}{v_x} = \frac{-18.843\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{17.321\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = -1.\,087\,9 \\ a &= \arctan\left(-1.\,087\,9\right) = -0.827\,47 \quad \text{im Bogenmaß!!} \\ \alpha &= \frac{-0.827\,47}{2\pi} \cdot 360^\circ = -0.131\,70 \cdot 360 = -47.412^\circ \end{aligned}$$

Ja, ich weiß, die Antwortsätze noch ...